

Задание на выполнение работы.

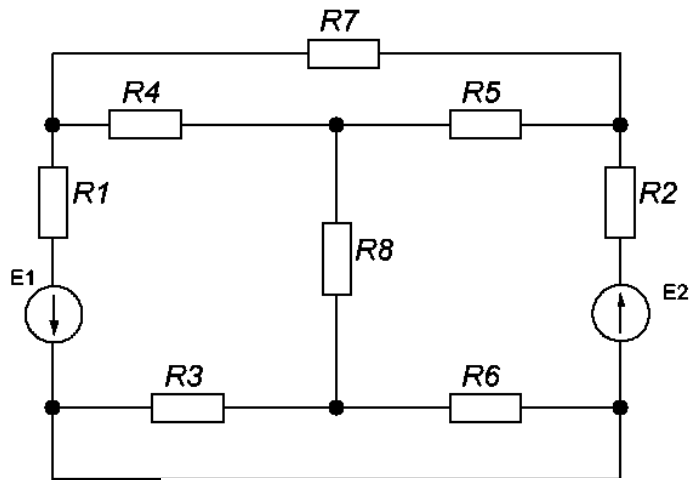
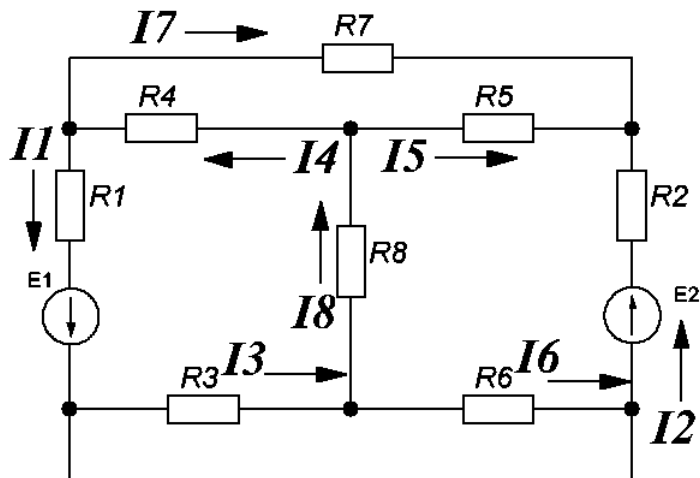


Схема 5

Вариант	E_1	E_2	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6	R_7	R_8	Ветвь для п.7
5	15	51	47	140	185	250	340	260	126	200	R_5



Пункт 1. Расчет значений токов ветвей методом уравнений Кирхгофа.

Произвольно зададим направления токов в ветвях схемы (см.рис.2).

Исследуемая схема содержит 8 ветвей и 4 независимых узла. Следовательно, для расчета токов нужно составить систему из восьми уравнений (4 по первому закону Кирхгофа и 4 по второму):

$$\left\{ \begin{array}{l} I_1 - I_2 - I_3 + I_6 = 0 \\ I_1 - I_4 + I_7 = 0 \\ I_4 + I_5 - I_8 = 0 \\ I_2 + I_5 + I_7 = 0 \\ I_3 - I_6 - I_8 = 0 \\ R_4 I_4 - R_5 I_5 + R_7 I_7 = 0 \\ R_1 I_1 + R_3 I_3 + R_4 I_4 + R_8 I_8 = E_1 \\ R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_8 I_8 + R_6 I_6 = E_2 \\ R_3 I_3 + R_6 I_6 = 0 \end{array} \right.$$

Подставив значения сопротивлений резисторов из таблицы 1, получим расширенную матрицу коэффициентов решаемой системы:

$$M := \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & -R_5 & 0 & R_7 & 0 \\ R_1 & 0 & R_3 & R_4 & 0 & 0 & 0 & R_8 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & -R_5 & R_6 & 0 & -R_8 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & R_6 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 250 & -340 & 0 & 126 & 0 \\ 47 & 0 & 185 & 250 & 0 & 0 & 0 & 200 \\ 0 & 140 & 0 & 0 & -340 & 260 & 0 & -200 \\ 0 & 0 & 185 & 0 & 0 & 260 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\underline{L} := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ E_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$L = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 51 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$X := M^{-1} \cdot L$$

$$X = \begin{pmatrix} 0.219 \\ 0.231 \\ -0.007 \\ 0.033 \\ -0.045 \\ 0.005 \\ -0.186 \\ -0.012 \end{pmatrix}$$

Решая указанную систему, получаем токи

$$I_1 := X_0 \quad I_1 = 0.219 \quad A$$

$$I_2 := X_1 \quad I_2 = 0.231 \quad A$$

$$I_3 := X_2 \quad I_3 = -0.007 \quad A$$

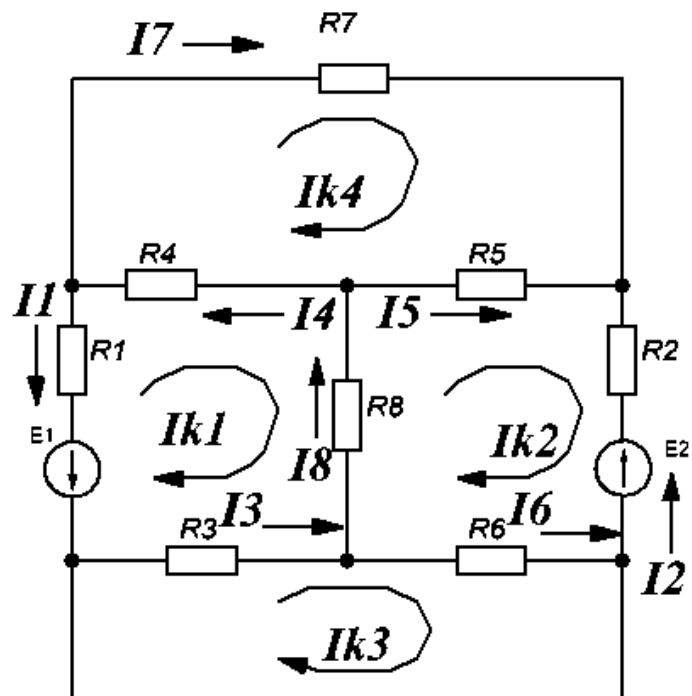
$$I_4 := X_3 \quad I_4 = 0.033 \quad A$$

$$I_5 := X_4 \quad I_5 = -0.045 \quad A$$

$$I_6 := X_5 \quad I_6 = 0.005 \quad A$$

$$I_7 := X_6 \quad I_7 = -0.186 \quad A$$

$$I_8 := X_7 \quad I_8 = -0.012 \quad A$$



Пункт 2. Рассчитаем токи в исходной схеме по методу контурных токов.

Схема содержит четыре независимых контура с четырьмя контурными токами, направление которых показано на рисунке 3.

Учитывая направления контурных токов, можно записать систему уравнений по методу контурных токов в общем виде:

$$\begin{cases} R_{11}I_{11} - R_{12}I_{22} - R_{13}I_{33} - R_{14}I_{44} = E_{11} \\ R_{21}I_{11} - R_{22}I_{22} - R_{23}I_{33} - R_{24}I_{44} = E_{22} \\ R_{31}I_{11} - R_{32}I_{22} - R_{33}I_{33} - R_{34}I_{44} = E_{33} \\ R_{41}I_{11} - R_{42}I_{22} - R_{43}I_{33} - R_{44}I_{44} = E_{44} \end{cases}$$

Собственные сопротивления контуров:

$$\begin{aligned} R_{11} &:= R_1 + R_4 + R_8 + R_3 & R_{11} &= 682 \, \Omega \\ R_{22} &:= R_6 + R_8 + R_5 + R_2 & R_{22} &= 940 \, \Omega \\ R_{33} &:= R_3 + R_6 & R_{33} &= 445 \, \Omega \\ R_{44} &:= R_4 + R_7 + R_5 & R_{44} &= 716 \, \Omega \end{aligned}$$

Общие сопротивления контуров:

$R_{12} := R_8$	$R_{12} = 200 \, \Omega$	$R_{21} := R_8$	$R_{21} = 200 \, \Omega$	
$R_{13} := R_3$	$R_{13} = 185 \, \Omega$	$R_{31} := R_3$	$R_{31} = 185 \, \Omega$	$R_{34} := 0 \, \Omega$
$R_{14} := R_4$	$R_{14} = 250 \, \Omega$	$R_{41} := R_4$	$R_{41} = 250 \, \Omega$	$R_{43} := 0 \, \Omega$
$R_{23} := R_6$	$R_{23} = 260 \, \Omega$	$R_{32} := R_6$	$R_{32} = 260 \, \Omega$	
$R_{24} := R_5$	$R_{24} = 340 \, \Omega$	$R_{42} := R_5$	$R_{42} = 340 \, \Omega$	

Контурные ЭДС:

$$E_{11} := -E_1 \quad E_{11} = -15 \text{ В}$$

$$E_{22} := -E_2 \quad E_{22} = -51 \text{ В}$$

$$E_{33} := 0$$

$$E_{44} := 0$$

Расширенная матрица коэффициентов системы имеет вид:

$$R := \begin{pmatrix} R_{11} & -R_{12} & -R_{13} & -R_{14} \\ -R_{21} & R_{22} & -R_{23} & -R_{24} \\ -R_{31} & -R_{32} & R_{33} & -R_{34} \\ -R_{41} & -R_{42} & -R_{43} & R_{44} \end{pmatrix} \quad R = \begin{pmatrix} 682 & -200 & -185 & -250 \\ -200 & 940 & -260 & -340 \\ -185 & -260 & 445 & 0 \\ -250 & -340 & 0 & 716 \end{pmatrix}$$

$$EE := \begin{pmatrix} E_{11} \\ E_{22} \\ E_{33} \\ E_{44} \end{pmatrix} \quad EE = \begin{pmatrix} -15 \\ -51 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad XX := R^{-1} \cdot EE \quad XX = \begin{pmatrix} -0.219 \\ -0.231 \\ -0.226 \\ -0.186 \end{pmatrix}$$

Решив систему, получим контурные токи:

$$I_{11} := XX_0 \quad I_{11} = -0.219 \text{ А}$$

$$I_{22} := XX_1 \quad I_{22} = -0.231 \text{ А}$$

$$I_{33} := XX_2 \quad I_{33} = -0.226 \text{ А}$$

$$I_{44} := XX_3 \quad I_{44} = -0.186 \text{ А}$$

Зная контурные токи, находим токи в ветвях:

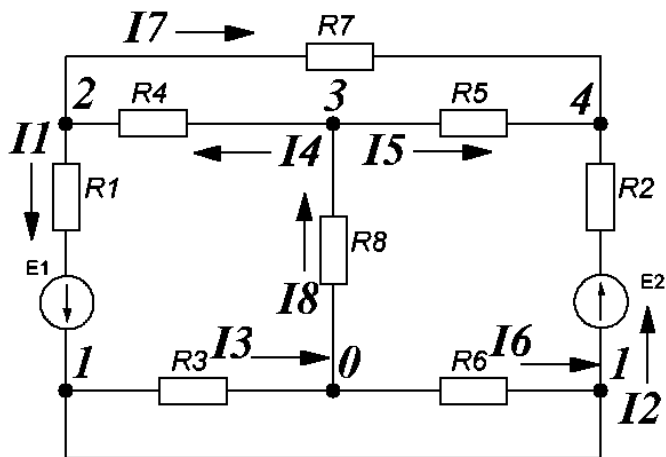
$$I_1 := -I_{11} \quad I_1 = 0.219 \text{ А} \quad I_5 := I_{22} - I_{44} \quad I_5 = -0.045 \text{ А}$$

$$I_2 := -I_{22} \quad I_2 = 0.231 \text{ А} \quad I_6 := I_{33} - I_{22} \quad I_6 = 0.005 \text{ А}$$

$$I_3 := I_{33} - I_{11} \quad I_3 = -0.007 \text{ А} \quad I_7 := I_{44} \quad I_7 = -0.186 \text{ А}$$

$$I_4 := -I_{11} - I_{44} \quad I_4 = 0.405 \text{ А} \quad I_8 := I_{22} - I_{11} \quad I_8 = -0.012 \text{ А}$$

Найденные токи практически совпадают с рассчитанными в пункте 1.



Пункт 3. Расчет токов методом узловых напряжений.

Схема с нумерацией узлов и условными положительными направлениями узловых напряжений показана на рис.4. За базовый принимаем узел № 0.

Заданная схема содержит четыре независимых узла, поэтому общий вид системы уравнений для определения узловых напряжений будет таким:

$$\begin{cases} G_{11}U_{11} - G_{12}U_{22} - G_{13}U_{33} - G_{14}U_{44} = J_{11} \\ -G_{21}U_{11} + G_{22}U_{22} - G_{23}U_{33} - G_{24}U_{44} = J_{22} \\ -G_{31}U_{11} - G_{32}U_{22} + G_{33}U_{33} - G_{34}U_{44} = J_{33} \\ -G_{41}U_{11} - G_{42}U_{22} - G_{43}U_{33} + G_{44}U_{44} = J_{44} \end{cases}$$

Собственные проводимости узлов:

(узловой проводимостью называется сумма проводимостей всех ветвей, присоединенных к данному узлу)

$$G_{11} := \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r_6} \quad G_{11} = 0.038 \quad \Omega^{-1}$$

$$G_{22} := \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_7} \quad G_{22} = 0.033 \quad \Omega^{-1}$$

$$G_{33} := \frac{1}{r_4} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_7} \quad G_{33} = 0.015 \quad \Omega^{-1}$$

$$G_{44} := \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_5} + \frac{1}{r_7} \quad G_{44} = 0.018 \quad \Omega^{-1}$$

Общие проводимости узлов:

(общей проводимостью называется сумма проводимостей всех ветвей, соединяющих данные два узла)

$$G_{12} := \frac{1}{r_1} \quad G_{21} := \frac{1}{r_1} \quad G_{12} = 0.021 \quad \Omega^{-1} \quad G_{21} = 0.021 \quad \Omega^{-1}$$

$$G_{13} := 0 \quad G_{31} := 0$$

$$G_{14} := \frac{1}{r_2} \quad G_{14} = 7.143 \times 10^{-3} \quad \Omega^{-1} \quad G_{41} := \frac{1}{r_2} \quad G_{41} = 7.143 \times 10^{-3} \quad \Omega^{-1}$$

$$G_{23} := \frac{1}{r_4} \quad G_{23} = 4 \times 10^{-3} \quad \Omega^{-1} \quad G_{32} := \frac{1}{r_4} \quad G_{32} = 4 \times 10^{-3} \quad \Omega^{-1}$$

$$G_{24} := \frac{1}{r_7} \quad G_{24} = 7.937 \times 10^{-3} \quad \Omega^{-1} \quad G_{42} := \frac{1}{r_7} \quad G_{42} = 7.937 \times 10^{-3} \quad \Omega^{-1}$$

$$G_{34} := \frac{1}{r_5} \quad G_{34} = 2.941 \times 10^{-3} \quad \Omega^{-1} \quad G_{43} := \frac{1}{r_5} \quad G_{43} = 2.941 \times 10^{-3} \quad \Omega^{-1}$$

Узловые токи:

(узловым током называется алгебраическая сумма внутренних токов источников тока всех ветвей, присоединенных к данному узлу.

В этой сумме токи источников тока, направленные к узлу, считаются положительными, а от узла – отрицательными)

$$J_{11} := \frac{E_1}{r_1} + \frac{-E_2}{r_2} \quad J_{11} = -0.045 \quad \text{A} \quad J_{33} := 0 \quad \text{A}$$

$$J_{22} := \frac{-E_1}{r_1} \quad J_{22} = -0.319 \quad \text{A} \quad J_{44} := \frac{E_2}{r_2} \quad J_{44} = 0.364 \quad \text{A}$$

Расширенная матрица коэффициентов системы имеет вид:

$$G := \begin{pmatrix} G_{11} & -G_{12} & -G_{13} & -G_{14} \\ -G_{21} & G_{22} & -G_{23} & -G_{24} \\ -G_{31} & -G_{32} & G_{33} & -G_{34} \\ -G_{41} & -G_{42} & -G_{43} & G_{44} \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 0.038 & -0.021 & 0 & -0.007 \\ -0.021 & 0.033 & -0.004 & -0.008 \\ 0 & -0.004 & 0.015 & -0.003 \\ -0.007 & -0.008 & -0.003 & 0.018 \end{pmatrix}$$

$$J := \begin{pmatrix} J_{11} \\ J_{22} \\ J_{33} \\ J_{44} \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} -0.045 \\ -0.319 \\ 0 \\ 0.364 \end{pmatrix} \quad \text{HAPRUGA} := G^{-1} \cdot J \quad \text{HAPRUGA} = \begin{pmatrix} -1.47 \\ -6.244 \\ 1.714 \\ 17.162 \end{pmatrix}$$

Решив систему, получим:

$$U_{11} := \text{HAPRUGA}_0 \quad U_{11} = -1.47 \quad \text{B} \quad U_{33} := \text{HAPRUGA}_2 \quad U_{33} = 1.714 \quad \text{B}$$

$$U_{22} := \text{HAPRUGA}_1 \quad U_{22} = -6.244 \quad \text{B} \quad U_{44} := \text{HAPRUGA}_3 \quad U_{44} = 17.162 \quad \text{B}$$

Зная узловые напряжения, найдем токи ветвей. Для этого воспользуемся вторым законом Кирхгофа.

$$\begin{aligned} I_1 &:= \frac{(E_1 + U_{22} - U_{11})}{r_1} & I_1 &= 0.218 \quad \text{A} & I_5 &:= \frac{(U_{33} - U_{44})}{r_5} & I_5 &= -0.045 \quad \text{A} \\ I_2 &:= \frac{(E_2 + U_{11} - U_{44})}{r_2} & I_2 &= 0.231 \quad \text{A} & I_6 &:= \frac{-U_{11}}{r_6} & I_6 &= 0.006 \quad \text{A} \\ I_3 &:= \frac{U_{11}}{r_3} & I_3 &= -0.008 \quad \text{A} & I_7 &:= \frac{(U_{22} - U_{44})}{r_7} & I_7 &= -0.186 \quad \text{A} \\ I_4 &:= \frac{(U_{33} - U_{22})}{r_4} & I_4 &= 0.032 \quad \text{A} & I_8 &:= \frac{-U_{33}}{r_8} & I_8 &= -0.012 \quad \text{A} \end{aligned}$$

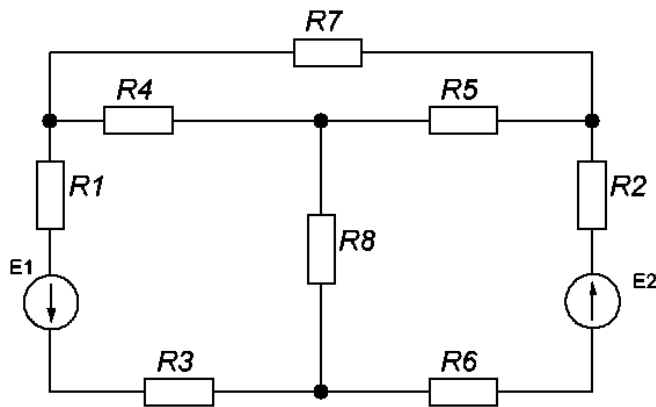
Найденные токи практически совпадают с рассчитанными в пункте 1.

Пункт 4. Преобразовать заданную схему в трехконтурную.

Преобразуем схему таким образом, чтобы получилось 3 контура и 4 узла.
Для этого оставим без изменения ветви лежащие между узлами 1,2, 3 и 4.
Заменим параллельные ветви между узлами 1-0 R_3 и R_6 эквивалентной ветвью:

$$R_{36} := \frac{(r_3 \cdot r_6)}{r_3 + r_6} \quad R_{36} = 108,1 \Omega$$

Преобразованная схема имеет вид, показанный на рис. 5



Пункт 5. В преобразованной цепи найти токи всех ветвей.

Произвольно зададим направления токов в ветвях схемы (см.рис.5).

Исследуемая схема содержит 6 ветвей и 3 независимых узла. Следовательно, для расчета токов нужно составить систему из шести уравнений (3 по первому закону Кирхгофа и 3 по второму):

$$\begin{cases} I_1 - I_4 + I_7 = 0 \\ I_4 + I_5 - I_8 = 0 \\ I_2 + I_5 + I_7 = 0 \\ I_3 - I_6 - I_8 = 0 \\ R_4 I_4 - R_5 I_5 + R_7 I_7 = 0 \\ R_1 I_1 + R_{36} I_8 + R_8 I_8 + R_4 I_4 = E_1 \\ R_2 I_2 - R_5 I_5 - R_8 I_8 - R_{36} I_8 = E_2 \end{cases}$$

Подставив значения сопротивлений резисторов из таблицы 1, получим расширенную матрицу коэффициентов решаемой системы:

$$B := \begin{pmatrix} I_1 & I_2 & I_4 & I_5 & I_7 & I_8 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ r_1 & 0 & r_4 & 0 & 0 & R_{36} + r_8 \\ 0 & 0 & r_4 & -r_5 & r_7 & 0 \\ 0 & r_2 & 0 & -r_5 & 0 & -r_8 - R_{36} \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 47 & 0 & 250 & 0 & 0 & 308.09 \\ 0 & 0 & 250 & -340 & 126 & 0 \\ 0 & 140 & 0 & -340 & 0 & -308.09 \end{pmatrix}$$

$$L1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ E_1 \\ 0 \\ E_2 \end{pmatrix} \quad L1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 15 \\ 0 \\ 51 \end{pmatrix} \quad Z := B^{-1} \cdot L1 \quad Z = \begin{pmatrix} 0.219 \\ 0.231 \\ 0.033 \\ -0.045 \\ -0.186 \\ -0.012 \end{pmatrix}$$

Решая указанную систему, получаем токи

$$\begin{aligned} I_1 &:= Z_0 & I_1 &= 0.219 \\ I_2 &:= Z_1 & I_2 &= 0.231 \\ I_4 &:= Z_2 & I_4 &= 0.032 \\ I_5 &:= Z_3 & I_5 &= -0.045 \\ I_7 &:= Z_4 & I_7 &= -0.186 \\ I_8 &:= Z_5 & I_8 &= -0.012 \end{aligned}$$

Найденные токи практически совпадают с рассчитанными в пункте 1.